e4a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS- ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Exercice 1

1° Soient a et b deux réels, $a < b$, et soit f une application de $[a,b]$ dans R de classe C^2. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)dx .$$

2° Soit g l'application de $[1,+\infty[$ dans R définie par $x \mapsto g(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Montrer que g'' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

3° Pour n entier naturel non nul on pose :

$$u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \qquad v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \qquad w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$

a) Montrer que w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 2\cos 1 - 2\cos\sqrt{n+1}.$$

Prouver que la suite $(\cos n)$ n'est pas convergente.

En déduire la nature de la série de terme général v_n.

c) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On note ln la fonction logarithme népérien.
Soit n un entier naturel non nul.

1° Soient I et J deux intervalles de R, non vides, non réduits à un point.
On considère une suite (f_n) d'applications de I dans J, une application f de I dans J et une application g de J dans R.
On suppose que g est uniformément continue sur J et que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Montrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément sur I vers $g \circ f$.

2° Soit φ une application continue de $[0,1]$ dans R.

a) Déterminer le réel L tel que : $L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) Soit A un réel strictement positif.

i) Justifier l'existence d'un entier naturel non nul N tel que, pour tout n, $n \geq N$, pour tout k élément de $\{0,1,2,\ldots,n\}$ et tout x de $[-A, A]$ on ait :

$$\left| \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

ii) Établir que pour tout t élément de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq t - \ln(1+t) \leq t^2.$$

iii) Pour $n \geq N$, on considère les applications u_n et v_n de $[-A, A]$ dans R, définies par :

$$x \mapsto u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \qquad x \mapsto v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 + \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers la fonction nulle.

iv) En déduire que la suite (v_n) converge uniformément sur $[-A, A]$ vers une application notée v.
Pour tout x de $[-A, A]$, exprimer $v(x)$ en fonction de L.

3° On pose :

$$I_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right] dx.$$

Étudier la convergence de la suite (I_n)

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

Pour $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et l'on note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Pour k entier naturel, $0 \leq k \leq n$, on rappelle que le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est C_n^k, avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à coefficients entiers relatifs.

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $A^m = I$.

Soit p le plus petit des entiers naturels k non nuls tels que $A^k = I$.

1° a) Montrer que m est un multiple de p.

b) Prouver que le déterminant de A est égal à 1 ou à -1.

c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et que les valeurs propres de A sont des racines p-ièmes de l'unité.

2° Soit $P_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de A.

a) Justifier l'assertion : « les coefficients de P_A sont des entiers relatifs ».

b) Exprimer les coefficients a_k en fonction des valeurs propres de A.

En déduire que pour tout k élément de $\{0,1,\ldots,n\}$ on a :

$$|a_k| \leq C_n^k.$$

3° On suppose dans cette question que $n = 2$.

a) Montrer que A est semblable à l'une des six matrices suivantes :

$$I,\ -I,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \bar{j} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}$$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}$ est le conjugué de j.

b) En déduire que p ne peut prendre que cinq valeurs que l'on précisera.

c) Pour chacune de ces valeurs de p autres que $p = 1$, indiquer une matrice A à coefficients entiers relatifs et telle que :

$$A^p = I \text{ et } A^k \neq I \text{ pour tout } k \text{ élément de } \{1,\ldots,p-1\}.$$

4° Dans le cas général, montrer que p ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et indiquer une méthode permettant de déterminer des valeurs possibles pour p.

Exercice 4

1° Dans l'ensemble $\mathbf{C}[X]$ des polynômes en l'indéterminée X à coefficients complexes, on considère un élément P de degré au moins égal à 1.
On note P' le polynôme dérivé de P et R le reste de la division euclidienne de P par P'.
Démontrer que les racines multiples de P sont les racines communes à P' et R.

2° On prend $P = X^3 + pX + q$ où p et q sont des complexes donnés.

a) Déterminer l'ensemble (γ) des racines communes à P' et R.

b) En déduire que P admet exactement deux racines distinctes si et seulement si :

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad pq \neq 0.$$

Préciser alors ces racines.
Que peut-on dire de ces racines si p et q sont réels ?

3° Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $M(x, y)$ le point du plan de coordonnées (x, y).
Pour tout réel λ, on désigne par d_λ la droite d'équation :

$$2x + \lambda y + \lambda^3 - 2 = 0.$$

On note (δ) la famille des droites d_λ lorsque λ décrit $\mathbf{R}$.

a) Montrer que la droite d_λ passe par le point $M(a, b)$ si et seulement si λ est racine du polynôme $X^3 + bX + 2a - 2$.
Préciser le nombre de droites de la famille (δ) passant par $A(1,0)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (ε) des points du plan par lesquels passent exactement deux droites distinctes de la famille (δ).

c) Déterminer la partie (φ) de (ε) des points du plan par lesquels passent exactement deux droites orthogonales de la famille (δ).

d) Représenter (ε) et (φ).